

Теорија вероватноћа - други домаћи задатак

1. Показати да важи:

$$X_n \xrightarrow{P} X, \text{ при } n \rightarrow +\infty \iff E\left(\frac{|X_n - X|}{1 + |X_n - X|}\right) \rightarrow 0, \text{ при } n \rightarrow +\infty.$$

2. Доказати следећа тврђења:

- Нека $X_n \xrightarrow{P} X$, при $n \rightarrow +\infty$, и нека је $g(\cdot)$ реална функција непрекидна на скупу реалних бројева. Тада важи: $g(X_n) \xrightarrow{P} g(X)$, при $n \rightarrow +\infty$.
- Нека низ случајних величина (X_n) конвергира са вероватноћом 1 ка случајној величини X , и нека низ случајних величина (Y_n) конвергира са вероватноћом 1 ка случајној величини Y , при $n \rightarrow +\infty$. Тада $aX_n + bY_n$ конвергира са вероватноћом 1 ка случајној величини $aX + bY$, при $n \rightarrow +\infty$, где су $a, b \in \mathbb{R}$ константе.

3. Нека је $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ низ независних случајних величина са законом расподеле

$$X_n : \begin{pmatrix} 0 & c & c^2 \\ \frac{1}{2n} & 1 - \frac{1}{n} & \frac{1}{2n} \end{pmatrix}.$$

Испитати да ли низ

$$Y_n = \frac{X_{n+1} + X_{n+2} + \cdots + X_{2n}}{n}$$

конвергира у средњем квадратном смислу.